Questions d'oral sur un thème

Barycentres

1 Questions tirées de [7]

Les questions suivantes sont tirées de la Section 1.2 du volume IV de la collection "Acquisition des fondamentaux pour les concours" [7]. La formulation de ces questions a parfois été changée pour se rapprocher de ce que l'on pourrait entendre quand on passe un oral. Seules les questions de type "Epreuve orale" ont été retenues ici, et les numéros des questions sont ceux donnés dans [7].

Question 17 Définissez le barycentre d'un système fini de points.

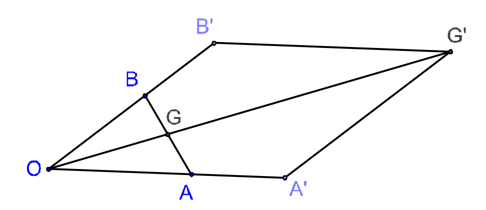
Question 18 Dans un espace affine sur $\mathbb{R}$, on considère n points A_1, ..., A_n et n réels α_1, ..., α_n. L'écriture $G = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$ a-t-elle un sens ? Expliquez.

Question 19 Dans un espace affine sur $\mathbb{R}$, on donne n points A_1, ..., A_n et n réels α_1, ..., α_n de somme non nulle. L'écriture

$$G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$$

a-t-elle un sens ? Expliquez.

Question 20 Sur la figure ci-dessous, $\overrightarrow{OA'} = \alpha\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = \beta\overrightarrow{OB}$ et $OA'G'B'$ est un parallélogramme. Montrez que G est le barycentre de $A(\alpha)$, $B(\beta)$.



Question 21 Enoncer et montrer la propriété d'associativité du barycentre.

Question 22 Que désigne-t-on par "fonction vectorielle de Leibniz" ? Que dire de cette fonction ?

Question 23 Montrer que l'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme coïncide avec les milieux des diagonales, et appartient aux droites passant par les milieux de deux côtés opposés.

Question 24 Montrer que l'isobarycentre des sommets d'un tétraèdre $ABCD$ est situé au $1/4$ de la base de chacun des segments d'extrémités un sommet et le centre de gravité de la base opposée, et qu'il coïncide avec le milieu des segments d'extrémités les milieux de deux arêtes opposées.

Question 26 Soient E un espace affine sur $\mathbb{R}$, et A, B deux points distincts de E. Quel est l'ensemble des barycentres des points A et B ? Preuve.

Question 27 Soient E un espace affine sur $\mathbb{R}$, et A, B, C deux points non alignés de E. Quel est l'ensemble des barycentres des points A, B et C ? Preuve.

Question 28 Donnez deux CNS pour qu'une partie non vide F d'un espace affine soit un sous-espace affine. Démontrez-les.

[0] [qbar0001] v1.00 Site Web MegaMaths

Question 29 En utilisant des barycentres, montrer que les trois médianes d'un triangle ABC sont concourantes en un point G. Que dire de G ?

Question 31 Montrer que les bissectrices intérieures d'un triangle ABC con-courent en un point I (appelé centre du cercle inscrit au triangle). Quelles sont les coordonnées barycentriques de I dans le repère affine (A, B, C) ? Que peut-on en déduire ? Pouvez-vous énoncer des résultats analogues concernant le concours d'une bissectrice intérieure et de deux bissectrices extérieures issues de sommets différents ?

Réponse 31 La méthode utilisée dans [7] pour répondre à cette question est violente et facile à retenir. Elle consiste à parachuter un point I dont les coordonnées barycentriques dans le repère (A, B, C) soit (a, b, c), puis à imaginer des losanges "bien placés", et à les exploiter, pour démontrer que I se trouve sur les trois bissectrices intérieures du triangle. A partir de là, on obtient tout ce que l'on veut sur les pieds de ces bissectrices intérieures et les centres des cercles exinscrits. C'est la voie royale...
Il n'empêche que cette preuve, efficace, peut laisser un arrière-goût amer puisqu'elle utilise un "parachutage" bien arbiraire des coordonnées barycentriques de I, qui ne peut être justifié que par une réflexion du genre : "la fin justifie les moyens".
Une étudiante m'a encore fait remarquer ce matin[1] que ce parachutage la gênait, et m'a demandé s'il n'existait pas une autre méthode qui ne l'utilise pas. Il en existe, bien sûr, et je lui ai exposé brièvement la preuve qui utilise le Théorème de Thalès et les bissectrices extérieures. On la retrouvera en "seconde preuve" proposée en réponse à la Question 152 de [7] sur les pieds des bissectrices d'un triangle (un thème connexe, évidemment !). On pourra essayer de retenir aussi cette seconde preuve pour l'utiliser ici ou comme "application" ou "exercice" dans une leçon sur le Théorème de Thalès. Il faut faire feu de tout bois !

Question 32 Déterminez les coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit à un triangle ABC, dans le repère (A, B, C), en fonction des longueurs des côtés et des angles du triangle.

Question 33 Montrer que le centre du cercle circonscrit à un triangle est à l'intérieur du triangle si et seulement si ce triangle est acutangle.

Question 34 Déterminez les coordonnées barycentriques de l'orthocentre d'un triangle ABC, dans le repère (A, B, C), en fonction des longueurs des côtés et des angles du triangle.

Question 35 A quelles conditions l'orthocentre d'un triangle est-il à l'intérieur du triangle ? Démontrez ce que vous affirmez.

Question 37 Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminez l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $MA/MB = k$.

Question 38 On considère trois points non alignés A, B, C dans un plan $\mathcal{P}$, et quatre réels α, β, γ et k. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$.

Question 39 Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine. Soient (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3) et (p_1, p_2, p_3) les coordonnées barycentriques de trois points M, N, P dans le repère (A, B, C), Montrer que :

$$M, N, P \text{ alignés } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Question 42 A, B, C sont trois points non alignés de l'espace. Quel est le lieu des points M tels que $||2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC}|| = ||2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}||$?

Question 43 (Oral du CAPES externe 2006) Soient A et B deux points distincts du plan, et M le barycentre de $A\,(3)$, $B\,(\alpha)$, où $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-3\}$. Le point M décrit-il toute la droite (AB) quand α varie ? Existe-t-il un moyen d'obtenir toute la droite en utilisant un seul coefficient ?

[1] En cette bonne journée du 4 mai 2010 de l'An de grâce 2010.

Question 44 (Oral du CAPES externe 2006) Une candidate écrit au tableau que M appartient à (AB) si et seulement si M est le barycentre de (A,α) et de (B,β) avec α et β réels, $\alpha+\beta\neq 0$. Question du jury : est-ce qu'on ne peut pas l'écrire mieux ?

Question 220 Enoncez et démontrez le Théorème de Ceva (sens direct et réciproque).

Question 221 Soient A, B, C trois points non alignés dans un plan. Soit M un point tel que (AM) (resp. (BM), (CM)) coupe (BC) (resp. (CA), (AB)) en A' (resp. B', C'). Montrer que

$$\frac{\overline{A'M}}{\overline{A'A}}+\frac{\overline{B'M}}{\overline{B'B}}+\frac{\overline{C'M}}{\overline{C'C}}=1.$$

2 Questions tirées de [8]

Le livre [8] est en construction. Voici des questions que j'y ai placées en avant première :

Question 1 *Soit M un point d'une droite (AB). Quel lien y-a-t-il entre les coordonnées barycentriques de M dans le repère (A,B) et les distances de M aux points A et B ?*

Réponse 1 On a évidemment :

$$\overline{MB}.\overrightarrow{MA}+\overline{AM}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0},$$

donc M est le barycentre de $A\left(\overline{MB}\right)$, $B\left(\overline{AM}\right)$. Les coordonnées barycentriques de M sont donc proportionnelles à $\left(\overline{MB},\overline{AM}\right)$.

Question 2 *Dans un plan, on considère trois droites en position générale. On note A, B, C les intersections de ces droites entre elles. Si M est un point du plan, on note (α,β,γ) ses coordonnées barycentriques normalisées dans le repère (A,B,C). Quel lien existe-t-il entre le signe des coefficients α, β, γ et la position de M par rapport aux droites ? Hachurez la partie du plan formée par les points M tels que $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$ et $\gamma\leq 0$.*

Réponse 2 Cette question est tirée d'un complément donné sur une leçon de CAPES ([1], § 5.2.6). Par hypothèse $\alpha+\beta+\gamma=1$ et :

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AM}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BA}+\gamma\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{CM}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}.\end{array}\right.$$

Le point M admet donc (β,γ) pour coordonnées cartésiennes dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, et ses coordonnées β, γ sont positives si et seulement si M appartient au secteur angulaire saillant $[\widehat{BAC}]$.
On rappelle que, par définition,

$$\begin{array}{rcl}[\widehat{BAC}] & = & [\widehat{[AB),[AC)}]\\ & = & \left\{M\in E\,/\,\exists\,(x,y)\in\mathbb{R}_+^2\quad \overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\right\}\end{array}$$

représente le secteur saillant délimité par les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$. Les signes de β et γ détermineront donc lequel des quatre secteurs délimités par les droites (AB) et (AC) contient M. En recommençant avec B, puis C à la place de A, on détermine le lien entre les signes des coefficients et la position de M par rapport aux droites (BA), (BC) dans un premier temps, et aux droites (CA), (CB) dans un second temps. Il suffit de regrouper ces informations pour obtenir le régionnement du plan par les trois droites décrit sur la FIG. 1.
La partie définie par les trois inégalités $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$ et $\gamma\leq 0$ est hachurée sur la FIG. 1.

Idée astucieuse : Pour retrouver le régionnement de la FIG. 1, pourquoi ne pas noter que la droite (AB) admet l'équation barycentrique $\gamma=0$, et que les demi-plans ouverts de frontière (AB) sont respectivement décrits par

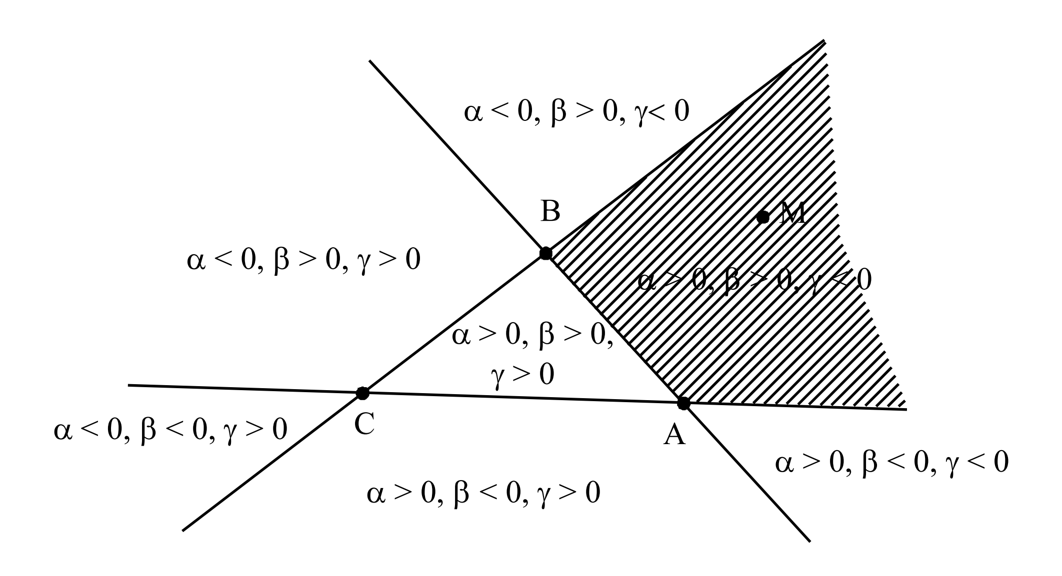


Figure 1: Régionnement du plan par trois droites

les inéquations $\gamma > 0$ et $\gamma < 0$. Plus précisément, comme C est barycentre de $A\,(0)$, $B\,(0)$, $C\,(1)$, le demi-plan ouvert de frontière (AB) contenant C est l'ensemble des points tels que $\gamma > 0$.
Les deux autres droites (BC) et (CA) partagent aussi le plan en des demi-plans d'équations $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$ pour (BC), puis $\beta > 0$ et $\beta < 0$ pour (CA). Il est facile de rassembler toutes ces informations sur un dessin pour obtenir la FIG. 1.

Question 3 *Un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*
a) Soient $U, V, W \in \mathcal{P}$. Qu'appelle-t-on aire algébrique *du triangle UVW ? On note $\mathcal{A}_{UVW}$ l'aire algébrique de UVW. Montrer que :*

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{UV} \wedge \overrightarrow{UW} = \mathcal{A}_{UVW}\,\overrightarrow{k}.$$

b) Montrer que les coordonnées barycentriques d'un point M dans un repère affine (A, B, C) sont proportionnelles aux aires algébriques $\mathcal{A}_{MBC}$, $\mathcal{A}_{MCA}$, $\mathcal{A}_{MAB}$ des triangles MBC, MCA, MAB.

Réponse 3 Notons $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ la direction de $\mathcal{P}$.

a) • Si UVW est un triangle quelconque, éventuellement aplati, on appelle *aire algébrique* du triangle UVW, et l'on note $\mathcal{A}_{UVW}$, le nombre réel dont la valeur absolue est l'aire classique du triangle UVW (encore appelée *aire géométrique* du triangle) et dont le signe est "+" si UVW est direct[2], "−" dans le cas contraire.

• Plongeons le plan $\mathcal{P}$ dans un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ de dimension 3, et appelons $\overrightarrow{k}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ directement orthogonal à la base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. L'égalité

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{UV} \wedge \overrightarrow{UW} = \mathcal{A}_{UVW}\,\overrightarrow{k}$$

est triviale si UVW est aplati. Supposons maintenant que les points U, V et W ne sont pas alignés, et notons H le projeté orthogonal de W sur (UV). L'aire géométrique du triangle UVW est

$$|\mathcal{A}_{UVW}| = \frac{UV \times WH}{2} = \frac{1}{2}\,UV \times UW\,|\sin(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{UW})| = \frac{1}{2}||\overrightarrow{UV} \wedge \overrightarrow{UW}||.$$

▷ Si le triangle UVW est direct, c'est-à-dire si la base $(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{UW})$ est directe, la base $(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{UW}, \overrightarrow{k})$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est directe, et $\overrightarrow{UV} \wedge \overrightarrow{UW}$ est colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{k}$, donc :

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{UV} \wedge \overrightarrow{UW} = |\mathcal{A}_{UVW}|\ \overrightarrow{k} = \mathcal{A}_{UVW}\,\overrightarrow{k}.$$

[2]Dans le cas utile où les points U, V, W ne sont pas alignés, on dit que le triangle UVW est direct si la base $(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{UW})$ est une base directe de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On rappelle que $(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{UW})$ est une base directe si et seulement si $(\overrightarrow{VW}, \overrightarrow{VU})$ (ou encore $(\overrightarrow{WU}, \overrightarrow{WV})$) en est une, et que cela se démontre "à coups de déterminants" en retournant à la définition de la relation "avoir même orientation" dans l'ensemble des bases de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ([2] § 8.2 ou [3] § 9.2).

$\triangleright$ Si le triangle UVW est indirect, la base $(\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW})$ est indirecte et le produit vectoriel $\overrightarrow{UV}\wedge\overrightarrow{UW}$ est colinéaire et de même sens que $-\overrightarrow{k}$, donc :

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{UV}\wedge\overrightarrow{UW}=|\mathcal{A}_{UVW}|\,(-\overrightarrow{k})=\mathcal{A}_{UVW}\,\overrightarrow{k}.$$

Dans tous les cas : $\frac{1}{2}\overrightarrow{UV}\wedge\overrightarrow{UW}=\mathcal{A}_{UVW}\,\overrightarrow{k}$.

b) On a :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0} &\Rightarrow \alpha\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MC}+\beta\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}\\ &\Rightarrow -\alpha\mathcal{A}_{MCA}+\beta\mathcal{A}_{MBC}=0\\ &\Rightarrow \begin{vmatrix}\alpha & \mathcal{A}_{MBC}\\ \beta & \mathcal{A}_{MCA}\end{vmatrix}=0.\end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{vmatrix}\beta & \mathcal{A}_{MCA}\\ \gamma & \mathcal{A}_{MAB}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\gamma & \mathcal{A}_{MAB}\\ \beta & \mathcal{A}_{MCA}\end{vmatrix}=0,$$

de sorte que les suites (α,β,γ) et $(\mathcal{A}_{MBC},\,\mathcal{A}_{MCA},\,\mathcal{A}_{MAB})$ sont proportionnelles.

3 Autres questions

Question 4 *Pouvez-vous donner les coordonnées d'un barycentre de n points A_1, ..., A_n en fonction des coordonnées de ces points A_i ?*

Question 5 *Quel est l'affixe du barycentre de n points A_i affectés de coefficients α_i $(1\leq i\leq n)$?*

Question 6 *Démontrer l'unicité des coordonnées barycentriques normalisées d'un point.*

References

[1] D.-J. Mercier, L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques, Leçons rédigées et commentées, Vol. III, Publibook, 2007.

[2] D.-J. Mercier, Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation, Publibook, 2008.

[3] D.-J. Mercier, Fondamentaux de géométrie pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Publibook, 2009.

[4] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. I : Ensembles de nombres, algèbre, arithmétique et polynômes, Publibook, à paraître.

[5] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. II : Algèbre linéaire, Publibook, à paraître.

[6] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. III : Rudiments de topologie, Espaces euclidiens et hermitiens, Publibook, à paraître.

[7] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Vol. IV : Géométrie affine et euclidienne, Publibook, 2010.

[8] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Cuvée Spéciale n°1, Publibook, à paraître.